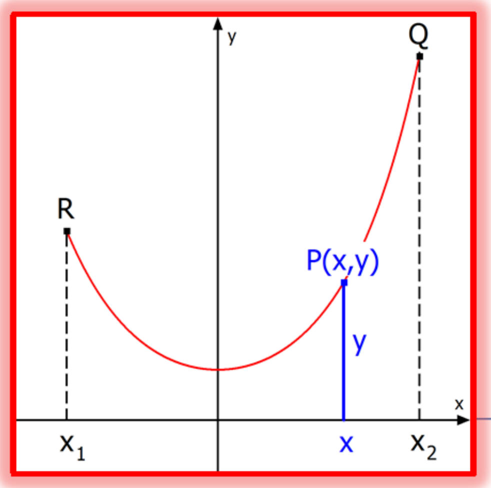


Kettenlinie

Text Nr. 54180

Stand 30. April 2016

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Mathematisch gesehen bezeichnet man als Kettenlinie das Schaubild der Kurven $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Dabei taucht eine Funktion auf, die man in der Schule nicht kennenlernt: Cosinus hyperbolicus.
Die Hyperbelfunktionen (mit Schaubildern Ableitungen und Integration) werden nicht in diesem Textr behandelt, sondern in **51601.**
Was man hier davon benötigt, wird ohne Begründung angegeben und verwendet – wie es auch der Student macht, nachdem er sich das Grundwissen nachgeschlagen hat …

Die Herleitung, dass eine Kette bzw. ein Seil genau die Form dieser Kurve einnimmt, ist schwer. Man benötigt physikalische Überlegungen über die potentielle Energie, die ein Minimum annimmt. Die komplizierte Rechnung führt dann auf eine Differenzialgleichung.

Diese Darstellungen übersteigt meine Zielsetzung. Man kann sie im Internet nachlesen, z. B. unter
http://www.mathe-seiten.de/kettenlinie.pdf und https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_(Mathematik)
sowie https://de.wikipedia.org/wiki/Kettenlinie_(Mathematik)

Definition und Gleichung

Die Kurve $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ heißt ***Kettenlinie***, weil sie den Verlauf einer durchhängenden Kette beschreibt. Man hat der zugrunde liegenden Funktion einen neuen Namen gegeben:

$f(x) = \cosh(x)$ (Cosinus Hyperbolicus , hyperbolischer Kosinus).

Als Kettenlinie bezeichnet man auch die Kurven, die durch zentrische Streckung aus $y = \cosh(x)$ entstehen: $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

Kleine Übung dazu:

Zentrische Streckungen kann man durch diese Abbildungsgleichungen realisieren: $\begin{Bmatrix} \bar{x} = a \cdot x \\ \bar{y} = a \cdot y \end{Bmatrix}$

Zum Abbilden von Kurven, muss man sie umstellen $\left\{ x = \frac{\bar{x}}{a} \text{ bzw. } y = \frac{\bar{y}}{a} \right\}$ und dann einsetzen:

$\frac{\bar{y}}{a} = \frac{e^{\bar{x}/a} + e^{-\bar{x}/a}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{y} = a \cdot \frac{e^{\bar{x}/a} + e^{-\bar{x}/a}}{2}$ bzw. ohne Striche: $y = a \cdot \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$

Dies ist dasselbe wie $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, $a > 0$.

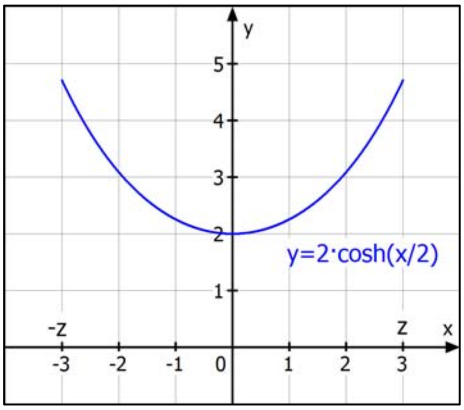
Ich möchte zur Kettenlinie einige rechnerische Aufgaben stellen und lösen.

Aufgabe 1

a) Berechne die Krümmung von $y = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$

b) Wo ist die Krümmung maximal?

c) Welche Gleichung hat der Krümmungskreis im Kurventiefpunkt?



Aufgabe 2

Berechne die Länge des Bogens der Kurve $y = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$ von x = 0 bis x = 2.

Aufgabe 3

Berechne die Fläche zwischen der Kurve aus Aufgabe 2 zwischen x = 0 und x = 2.

Lösung Aufgabe 1

a) **Berechnung der Krümmung:**

WISSEN: Die Ableitung von $y = \cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ ist $y = \sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
und deren Ableitung ist wieder cosh(x).

Wir brauchen die Ableitungen von $y = a \cdot \cosh\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Nach der Kettenregel folgt:

$$y' = a \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$y'' = \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \cdot \frac{1}{a} \quad \text{oder besser so geschrieben:} \quad y'' = \frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Krümmung: $$\kappa = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{a} \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}}$$

WISSEN: Es gilt der so genannte **hyperbolische Pythagoras**:
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ (was man sofort nachrechnen kann).
Also ist $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$

$$\kappa = \frac{1}{a} \cdot \frac{\cosh\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)\right)^{3/2}} = \frac{1}{a \cdot \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)} > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ (Linkskurve)}$$

b) Da die Funktion $f(x) = \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ bei x = 0 ihr Minimum hat, nimmt dort der Kehrwert, also auch die Krümmung ihren Maximalwert an.

Dieser hat den Wert $$\kappa(0) = \frac{1}{a \cdot \cosh^2(0)} = \frac{1}{a \cdot 1} = \frac{1}{a}$$

Denn $$\cosh(0) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

c) Krümmungskreisradius: $$r = \frac{1}{|\kappa(0)|} = a$$

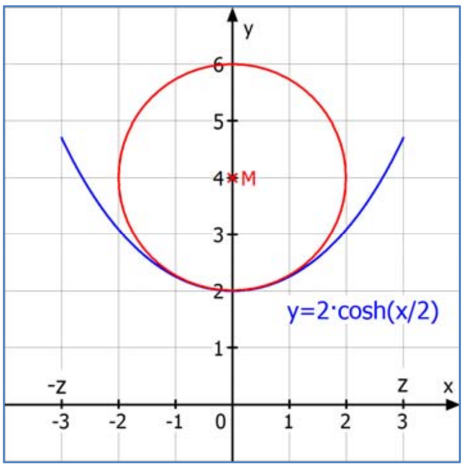
Der Mittelpunkt des Krümmungskreises liegt also um a über dem Tiefpunkt $T(0 \,|\, a)$:

$M(0 \,|\, 2a)$

Gleichung des Krümmungskreises:

$$x^2 + (y - 2a)^2 = a^2$$

In der Abbildung ist a = 2.



Lösung Aufgabe 2: Berechnung der Bogenlänge einer Kettenlinie

Gegeben ist also $y = 2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$

Ableitung: $y' = 2 \cdot \sinh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \sinh\left(\frac{x}{2}\right)$

Gesucht: $s = \int_{-3}^{3} \sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{3} \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

Berechnung: $s = 2 \cdot \int_{0}^{3} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx$

WISSEN:

Es gilt der so genannte hyperbolische Pythagoras: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Also ist $1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$

Daher folgt: $s = 2 \cdot \int_{0}^{3} \sqrt{\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}\,dx = 2 \cdot \int_{0}^{3} \cosh\left(\frac{x}{2}\right)\,dx = 2 \cdot \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = 4 \cdot \left[\sinh\left(\frac{x}{2}\right)\right]_0^3$

$s = 4 \cdot \left[\sinh(1{,}5) - \sinh(0)\right] \approx 8{,}517$

Lösung Aufgabe 3: Berechnung der Fläche.

$A = \int_{0}^{2} 2 \cdot \cosh\left(\frac{x}{2}\right)dx$ Substitution: $u = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2u \Rightarrow dx = 2 \cdot du$

$A = 4 \cdot \int_{0}^{2} \cosh(u)\,du = \left[\sinh(u)\right]_0^2 = \sinh(2) - \underbrace{\sinh(0)}_{=0} \approx 3{,}627$